Chapitre 3 : nombres réels et suites de nombres réels
Feuille d'exercices

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x^2+3x-2=0$.
2. $x^4+x^2+1=0$
3. $|x+3|=1$.
4. $|x^2-8x+11|=4$.
5. $\dfrac{e^7e^{x^2}}{e^{5x}}=e^{x+2}$.
6. $\sqrt{3x-5}=x-3$.
7. $\sqrt{2x-1}=1-2x$
8. $\sqrt{x^2+8}-2x=5$
9. $\ln(x+2)+\ln(x-3)=\ln(x+9)$.
10. $2e^{-x}-6e^{x}=1$.
11. $3e^{3x}+e^{2x}-2e^{x}=0$.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2+3x-4<0$.
2. $x^2+2x\geq 3$.
3. $(x-1)^2\leq 0$.
4. $x+\dfrac{1}{x}\geq 0$.
5. $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}<0$.
6. $\dfrac{x^2+1}{x-1}\geq 5$.
7. $\dfrac{1-4x}{x^2+x+1}\leq 0$
8. $2\ln(x)>0$.
9. $\ln(x^2)>0$.
10. $e^{-2x}-e^{-x}>0$.
11. $\ln(2x+1)<\ln(4-2x)$.
12. $x^3+e^x>8+e^2$
13. $x+\sqrt{x+1}<5$.

Exercice 3 Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont majorés, minorés, et si elles existent déterminer la borne sup et la borne inf :

1. $\{2n,\ n\in\mathbb{N}\}$
2. $\{2x,\ x\in\mathbb{R}\}$
3. $\{\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\}$
4. $\{\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}_+^*\}$

Exercice 4
Pour les suites suivantes, déterminer, s'il existe, le sup et l'inf :

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2^n+\dfrac{1}{2^n}$.
2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\ln(n+1)$.
3. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\cos(n)$.

Exercice 5
Exprimez en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par $u_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, les relations suivantes :

1. $u_{n+1}=u_n+3$.
2. $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}$.
3. $u_{n+1}=2u_n-2$.
4. $u_{n+1}=3u_n+3$.
5. $u_{n+1}=3u_n-5$.
6. $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3}-4$.

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+n$ **(1)**.

1. Déterminer une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation **(1)**
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=u_n-a_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
3. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 7
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suie définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n\geq 1, & u_n=u_{n-1}+n(-1)^{n+1} \end{cases}$$

1. Calculer u_n jusqu'au rang 5.
2. On pose $V_n=u_{2n}$ et $W_n=u_{2n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithmétiques.
3. Calculer V_n et W_n en fonction de n et en déduire le lien entre u_{2n-1} et u_{2n} pour tout entier non nul n.

Exercice 8 Exprimez en fonction de n le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par les relations suivantes :

1. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 4$.
2. $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$ et $u_0 = u_1 = 2$.
3. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_1 = 1$, $u_2 = 3$.
4. $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

Exercice 9 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}. \end{cases}$

1. Montrez que pour tout $n \geq 3$, $u_n > 1$.
2. Soit $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$. Déterminez l'expression du terme général v_n.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Suites imbriquées)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites déterminées par $u_0 = 1, v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 (presque une SRL2....)
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence :
.
$$\forall n \geq 0,\ w_{n+2} = 2w_{n+1} + 3w_n + 4.$$

1. Déterminez l'unique suite stationnaire vérifiant cette relation.
   On notera c la valeur constante de cette suite
2. Soit (w_n) une suite réelle quelconque (pas forcément constante) vérifiant la relation proposée. On pose $v_n = w_n - c$. Déterminez la relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par v_n.
3. En déduire l'expression du terme général de la suite w_n en fonction de n, w_0 et w_1.

Des exercices d'entraînement en plus, non corrigés

Exercice 12 (Suite Récurrente Linéaire d'Ordre 2)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

1. Trouver l'expression générale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer la somme des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13 (Suite Arithmético-Géométrique avec Paramètres)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $x_{n+1} = ax_n + b$ avec $x_0 = x$, où a et b sont des constantes réelles.

1. Résoudre l'équation de récurrence pour trouver l'expression générale de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des valeurs de a et b.
3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle est convergente.

Exercice 14 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_{n-1} = 2u_n$ et en déduire que u_n est un entier pair.
2. Montrer directement à l'aide de la formule du binôme que si $n \in \mathbb{N}, u_n$ est un entier pair.

Chapitre 3 : nombres réels et suites de nombres réels
Feuille d'exercices

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x^2+3x-2=0$.
2. $x^4+x^2+1=0$
3. $|x+3|=1$.
4. $|x^2-8x+11|=4$.
5. $\dfrac{e^7e^{x^2}}{e^{5x}}=e^{x+2}$.
6. $\sqrt{3x-5}=x-3$.
7. $\sqrt{2x-1}=1-2x$
8. $\sqrt{x^2+8}-2x=5$
9. $\ln(x+2)+\ln(x-3)=\ln(x+9)$.
10. $2e^{-x}-6e^{x}=1$.
11. $3e^{3x}+e^{2x}-2e^{x}=0$.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2+3x-4<0$.
2. $x^2+2x\geq 3$.
3. $(x-1)^2\leq 0$.
4. $x+\dfrac{1}{x}\geq 0$.
5. $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}<0$.
6. $\dfrac{x^2+1}{x-1}\geq 5$.
7. $\dfrac{1-4x}{x^2+x+1}\leq 0$
8. $2\ln(x)>0$.
9. $\ln(x^2)>0$.
10. $e^{-2x}-e^{-x}>0$.
11. $\ln(2x+1)<\ln(4-2x)$.
12. $x^3+e^x>8+e^2$
13. $x+\sqrt{x+1}<5$.

Exercice 3 Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont majorés, minorés, et si elles existent déterminer la borne sup et la borne inf :

1. $\{2n,\ n\in\mathbb{N}\}$
2. $\{2x,\ x\in\mathbb{R}\}$
3. $\{\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\}$
4. $\{\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}_+^*\}$

Exercice 4
Pour les suites suivantes, déterminer, s'il existe, le sup et l'inf :

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2^n+\dfrac{1}{2^n}$.
2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\ln(n+1)$.
3. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\cos(n)$.

Exercice 5
Exprimez en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par $u_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, les relations suivantes :

1. $u_{n+1}=u_n+3$.
2. $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}$.
3. $u_{n+1}=2u_n-2$.
4. $u_{n+1}=3u_n+3$.
5. $u_{n+1}=3u_n-5$.
6. $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3}-4$.

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+n$ **(1)**.

1. Déterminer une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation **(1)**
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=u_n-a_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
3. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 7
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suie définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n\geq 1, & u_n=u_{n-1}+n(-1)^{n+1} \end{cases}$$

1. Calculer u_n jusqu'au rang 5.
2. On pose $V_n=u_{2n}$ et $W_n=u_{2n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithmétiques.
3. Calculer V_n et W_n en fonction de n et en déduire le lien entre u_{2n-1} et u_{2n} pour tout entier non nul n.

Exercice 8 Exprimez en fonction de n le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par les relations suivantes :

1. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 4$.
2. $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$ et $u_0 = u_1 = 2$.
3. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_1 = 1$, $u_2 = 3$.
4. $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

Exercice 9 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}. \end{cases}$

1. Montrez que pour tout $n \geq 3$, $u_n > 1$.
2. Soit $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$. Déterminez l'expression du terme général v_n.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Suites imbriquées)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites déterminées par $u_0 = 1, v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 (presque une SRL2....)
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence :
.
$$\forall n \geq 0,\ w_{n+2} = 2w_{n+1} + 3w_n + 4.$$

1. Déterminez l'unique suite stationnaire vérifiant cette relation.
   On notera c la valeur constante de cette suite
2. Soit (w_n) une suite réelle quelconque (pas forcément constante) vérifiant la relation proposée. On pose $v_n = w_n - c$. Déterminez la relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par v_n.
3. En déduire l'expression du terme général de la suite w_n en fonction de n, w_0 et w_1.

Des exercices d'entraînement en plus, non corrigés

Exercice 12 (Suite Récurrente Linéaire d'Ordre 2)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

1. Trouver l'expression générale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer la somme des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13 (Suite Arithmético-Géométrique avec Paramètres)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $x_{n+1} = ax_n + b$ avec $x_0 = x$, où a et b sont des constantes réelles.

1. Résoudre l'équation de récurrence pour trouver l'expression générale de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des valeurs de a et b.
3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle est convergente.

Exercice 14 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_{n-1} = 2u_n$ et en déduire que u_n est un entier pair.
2. Montrer directement à l'aide de la formule du binôme que si $n \in \mathbb{N}, u_n$ est un entier pair.